CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

Profilul real specializarea științele naturii

Profilul tehnic

**Faza locală, 25 februarie 2017**
**Clasa a IX-a**

**Subiectul 1 (7 puncte)**

a) Arătați că pentru orice număr natural *n* avem: $n \le \sqrt{n(n+1)} < n+1$.
b) Demonstrați că $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ pentru orice $n \ge 1$.
c) Calculați $[\sqrt{1\cdot 2}]+[\sqrt{3\cdot 4}]+[\sqrt{5\cdot 6}]+\cdots+[\sqrt{2017\cdot 2018}]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *x*.

**Barem**

a) Demonstrează prima inegalitate. **(1p)**
Demonstrează a doua inegalitate **(1p)**
b) Demonstrează prin inducție matematică egalitatea dată **(3p)**
(pentru etapa de verificare se acordă 1p)
c) Conform punctului a.) $\left[\sqrt{n(n+1)}\right]=n$ **(1p)**
$[\sqrt{1\cdot 2}]+[\sqrt{3\cdot 4}]+\cdots+[\sqrt{2017\cdot 2018}]=1+3+\cdots+2017=1009^2$ (conform punctului b)) **(1p)**

**Subiectul 2 (7 puncte)**

Fie $S_n=n^2-3n$ suma primilor n termeni ai unui șir $a_n$.
a) Găsiți valoarea termenului general al șirului $a_n$.
b) Precizați ce fel de progresie este acesta.

**Barem**

a) $a_n=S_n-S_{n-1}=2n-4$ **(3p)**
b) Șirul $a_n$ verifică relația $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, deci $a_n$ este progresie aritmetică. **(4p)**

**Subiectul 3 ( 7 puncte)**

a) Verificați dacă numărul $a=\sqrt{2^4}+\sqrt{\frac{5}{0,0(2)}}+\sqrt{\frac{55}{0,0(02)}}+\sqrt{\frac{555}{0,0(002)}}$ este pătrat perfect.
b) Să se determine numerele reale *x* astfel încât să existe intervalul $I=\left[\frac{x+2}{2};\frac{3x+2017}{4}\right]$.

**Barem**

a) $\sqrt{\frac{5}{0,0(2)}}=5\cdot 3$ **(1p),** $\sqrt{\frac{55}{0,0(02)}}=55\cdot 3$ **(1p),** $\sqrt{\frac{555}{0,0(002)}}=555\cdot 3$ **(1p),** $a=1849=43^2$ pătrat perfect **(1p)**.
b) Pentru ca să existe intervalul se pune condiția: $\frac{x+2}{2}\le\frac{3x+2017}{4}$ **(1p)**

Se obține succesiv $2x+4 \leq 3x+2017 \Leftrightarrow -x \leq 2013 \Leftrightarrow x \geq -2013 <=> x \in [-2013, \infty)$. **(2p)**

**Subiectul 4 (7 puncte)**

Fie *ABCD* un paralelogram și punctele *M* și *N* astfel încât $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{NC}$. Arătați că punctele *B*, *M*, *N* sunt coliniare.

**Barem**

Pentru poziționarea corectă a punctelor *M* și *N* pe figură **(1p)**

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD}$ **(2p)**

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD}\right)$ **(2p)**

$\Longrightarrow \overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{BN}$ **(1p)**

De unde rezultă punctele *B*,*M*,*N* coliniare. **(1p)**